第63卷第6期 数学学报中文版 Vol.63, No.6
2020年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Nov., 2020

文章编号: 0583-1431(2020)06-0587-14 **文献标识码:** A

带有热记忆的非均匀柔性结构的长时间动力行为

冯保伟

西南财经大学经济数学学院 成都 611130
E-mail: bwfeng@swufe.edu.cn

李海燕

北方民族大学数学与信息科学学院 银川 750021
E-mail: lihaiyanmath@163.com

摘 要 本文研究了带有热效应的非均匀柔性结构方程, 并且该热效应符合 Coleman–Gurtin 定律. 利用半群方法, 建立了系统的整体适定性. 主要结论是该系统的长时间动力行为. 本文证明了系统的拟稳定性, 整体吸引子的存在性以及整体吸引子具有有限的分形维数. 此外, 还证明了指数吸引子的存在性.

关键词 柔性结构; 记忆项; 拟稳定性; 整体吸引子; 指数吸引子

MR(2010) 主题分类 35B41, 74D99, 93D20

中图分类 O175.4

Long-time Dynamics of a Non-uniform Flexible Structure with Thermal Memory

Bao Wei FENG

Department of Economic Mathematics,
Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130*, P. R. China*
E-mail: *bwfeng@swufe.edu.cn*

Hai Yan LI

Mathematics and Information Science,
North Minzu University, Yinchuan 750021*, P. R. China*
E-mail: *lihaiyanmath@163.com*

Abstract This paper is concerned with a non-uniform flexible structure with thermal effect governed by Coleman–Gurtin law. By using semi-group method, we establish the global well-posedness of the system. The main result is the long-time dynamics of the

收稿日期: 2019-08-22; 接受日期: 2020-01-08
基金项目: 国家自然科学基金 (11701465, 11701012, 61761002); 宁夏自然科学基金 (2020AAC03233)
北方民族大学重大专项 (ZDZX201901); 北方民族大学校级科研项目 (2018XYZSX02)
通讯作者: 李海燕

system. We prove the quasi-stability property of the system and obtain the existence of a global attractor, and the global attractor has finite fractal dimension. The existence of exponential attractors is also proved.

Keywords flexible structure; memory; quasi-stability; global attractor; exponential attractor
MR(2010) Subject Classification 35B41, 74D99, 93D20
Chinese Library Classification O177.2

1 引言

本文研究如下带有热效应的非均匀柔性结构模型:

$$m(x)u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x - \kappa\theta_x + f(u) = h(x), \tag{1.1}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} - \int_0^\infty g(s)\theta_{xx}(t-s)ds - \kappa u_{xt} = 0, \tag{1.2}$$

其中 $x \in [0, L]$, $u(x,t)$ 表示粒子的横向位移. $\theta(x,t)$ 表示温差. 函数 $m(x)$, $p(x)$ 和 $\delta(x)$ 分别表示每单位结构长度的质量、内部材料阻尼系数和一个与作用在物体的压力有关的大于零的函数. 常数 κ 是耦合系数. $f(u)$ 是源项, $h(x)$表示非齐次项. 该模型的热效应符合 Coleman–Gurtin 定律.

我们考虑边界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t \ge 0 \tag{1.3}$$

和初始条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,t)|_{t\le 0} = \theta_0(x,t), \quad x \in [0,L]. \tag{1.4}$$

一般来说, 柔性结构的振动在实际中为非线性模型, 例如弦、梁、板等. 柔性结构的线性振动方程通常表示为偏微分方程, 尤为著名的是二阶波方程和四阶 Euler–Bernoulli 梁方程 [26]. 目前为止, 学者们已经得到了很多带有不同类型阻尼项的波方程和板方程的稳定性结论. 比如, 内部阻尼、边界阻尼和热阻尼等. 当物体振动时, 线性动量平衡满足方程

$$mu_{tt} - \sigma_x = f,$$

这里 σ 是压力. 如果物体是非均匀的, 即 σ 满足

$$\sigma = \sigma(u_x, u_{xt}) = p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt},$$

可得到柔性结构的纵向振动方程

$$m(x)u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x = f.$$

详细结论可以参考文献 [22]. Gorain [19] 研究了该方程, 并证明了该系统的指数稳定性. 在柔性结构中, 如果考虑到热效应, 方程如下:

$$\theta_t + q_x - \kappa u_{tx} = 0,$$

其中 $q(x,t)$ 表示热通量. 相关物理背景可见 Carlson 的文 [4]. 如果热通量满足 Coleman–Gurtin 定律, 即

$$q(t) + (1-\alpha)\theta_x(t) + \alpha\int_0^\infty g(s)\theta_x(t-s)ds = 0, \quad \alpha \in (0,1)$$

就可以得到系统 (1.1), (1.2). 当上述方程参数 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 时, 系统分别满足傅里叶定律和 Gurtin–Pipkin 定律. Misra 等人 [25] 研究了满足傅里叶定律的热弹柔性结构方程

$$\begin{cases} m(x)u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x + \kappa\theta_x = f, \\ \theta_t - \theta_{xx} + \kappa u_{xt} = 0. \end{cases}$$

证明了该系统的稳定性, 建立了能量的指数衰减. 最近 Alves 等人 [1] 研究了带有二声的热弹可扩展结构方程, 并得到了相应系统的整体适定性和稳定性.

吸引子是研究非线性发展方程的长时间动力行为的基本概念. 关于波方程的整体吸引子的研究, Cavalcanti, Fatori 和 Ma [5] 考虑带有退化记忆的波方程

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)\mathrm{div}[a(x)\nabla u(t-s)]ds + f(u) = h(x),$$

并得到了具有有限分形维数的整体吸引子. 文 [2] 研究了带记忆的拟线性粘弹方程

$$|u_t|^\rho u_{tt} - \alpha\Delta u - \Delta u_{tt} + \int_{-\infty}^t \mu(t-s)\Delta u(s)ds - \gamma\Delta u_t + f(u) = h,$$

并利用 Faedo–Galerkin 逼近证明了系统的整体适定性, 整体吸引子的存在性. 关于四阶的 Euler–Bernoulli 梁 (板) 方程, 热弹板方程的吸引子, 可参考文献 [3, 10, 11, 13–15, 21, 23, 24, 30–32].

值得注意的是, 关于带有记忆非均匀热弹柔性结构 (1.1), (1.2) 的吸引子还尚未研究. 因此, 本文研究问题 (1.1), (1.2) 的适定性, 并讨论吸引子的存在性及其性质. 除此之外, 我们还讨论了指数吸引子的存在性, 利用半群理论研究了该系统的适定性. 关于长时间动力行为, 本文采用 Chueshov 和 Lasiecka [8] 以及文 [9, Chapter 7] 中的方法. 通过证明系统是梯度系统且半群是渐近光滑的, 我们得到了整体吸引子的存在性, 其特征是不稳定流形稳态解. 此外, 利用构造多乘子泛函, 建立系统的拟稳定性, 从而得到整体吸引子具有有限维分形维数.

由于消失记忆项的出现, 系统就由自治系统变为非自治系统. 为了处理记忆项, 本文采用 Dafermos [12] 和 Giorgi 等人 [16, 17] 的方法, 引入新的变量 $\eta = \eta^t(x,s)$,

$$\eta^t(x,s) = \int_0^s \theta(t-\tau)d\tau, \quad (t,s) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^+, \tag{1.5}$$

于是 $\eta_t + \eta_s = \theta$, $(x,t,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, 其初始条件为

$$\eta^0(s) = \eta_0(s) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{R}^+,$$

这里 $\eta_0(s) = \int_0^s \theta_0(\tau)d\tau$, $s \in \mathbb{R}^+$. 由方程 (1.5) 得到

$$\int_0^\infty g(s)\theta_{xx}(t-s)ds = -\int_0^\infty g'(s)\eta_{xx}^t(s)ds.$$

定义 $\mu(s) = -g'(s)$, 于是系统 (1.1)–(1.4) 可以转化为以下系统:

$$m(x)u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x - \kappa\theta_x + f(u) = h(x), \tag{1.6}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} - \int_0^\infty \mu(s)\eta_{xx}(s)ds - \kappa u_{xt} = 0, \tag{1.7}$$

$$\eta_t^t + \eta_s^t = \theta, \tag{1.8}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \eta^t(x,0) = 0, \quad x \in [0,L], \tag{1.9}$$

$$\eta^0(x,s) = \eta_0(x,s), \quad (x,s) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+, \tag{1.10}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{1.11}$$

本文第 2 节给出预备知识. 第 3 节研究系统的整体适定性. 第 4 节证明吸引子的存在性及其性质.

2 预备知识

本文用 $L^q(0,L)$ $(1\le q\le\infty)$ 和 $H^1(0,L)$ 分别表示 Lebesgue 积分空间和 Sobolev 空间. 空间 B 中的内积和范数分别表示为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|_B$. 为了书写方便, 当 $q=2$ 时, $\|u\|_2$ 简记为 $\|u\|$.

现在我们给出一些本文需要的假设.

(A1) 假定函数 $m(x)$, $p(x)$, $\delta(x):[0,L]\to\mathbb{R}^+$ 是一阶连续可导函数, 即 $m(x)$, $p(x)$, $\delta(x)\in C^1(0,L)$, 且存在大于零的常数 m_1,m_2,p_1,p_2 和 δ_1,δ_2, 使得

$$m_1\le m(x)\le m_2,\quad p_1\le p(x)\le p_2\quad \text{和}\quad \delta_1\le\delta(x)\le\delta_2. \tag{2.1}$$

(A2) 假定系统中的源项 $f(u)\in C^1(\mathbb{R})$ 且对于任意 $p>0$ 满足

$$|f(u)-f(v)|\le c_f(1+|u|^p+|v|^p)|u-v|,\quad \forall\, u,v\in\mathbb{R}, \tag{2.2}$$

其中 $c_f>0$ 是常数, 并且假定存在常数 $\alpha\in[0,p_1\lambda_1)$ 和 $C_f>0$ 满足

$$f(u)u\ge-\alpha u^2-C_f\quad \text{和}\quad F(u)\ge-\frac{\alpha}{2}u^2-C_f,\quad \forall\, u\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(s)ds$, $\lambda_1>0$ 是算子 Δ 在 $H_0^1(0,L)$ 中的第一特征值.

(A3) 关于函数 $\mu(t)$, 我们假设 $\mu:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是可微的, 且满足

$$\mu(0)>0,\quad \int_0^\infty\mu(s)ds=\mu_0>0, \tag{2.4}$$

以及存在常数 $k>0$, 使得

$$\mu'(t)\le-k\mu(t),\quad t\ge0. \tag{2.5}$$

关于新的变量 η, 定义加权 L^2- 空间

$$\mathscr{M}=L^2_\mu(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L))=\left\{\eta:\mathbb{R}^+\to H_0^1:\int_0^\infty\mu(s)\|\eta_x(s)\|^2ds<\infty\right\},$$

该空间是一个 Hilbert 空间, 内积和范数分别定义如下:

$$(\eta,\zeta)_{\mathscr{M}}=\int_0^\infty\mu(s)(\eta_x(s),\zeta_x(s))ds\quad \text{和}\quad \|\eta\|^2_{\mathscr{M}}=\int_0^\infty\mu(s)\|\eta_x(s)\|^2ds.$$

定义相空间

$$\mathscr{H}=H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2(0,L)\times\mathscr{M}.$$

该空间的范数为

$$\|(u,v,\theta,\eta)\|^2_{\mathscr{H}}=\|u_x\|^2+\|v\|^2+\|\theta\|+\|\eta\|^2_{\mathscr{M}},$$

内积为

$$\langle U,\bar U\rangle_{\mathscr{H}}=\int_0^L p(x)u_x\bar u_xdx+\int_0^L m(x)v\bar vdx+\int_0^L\theta\bar\theta dx+\int_0^\infty\mu(s)\int_0^L\eta_x\bar\eta_xdxds,$$

其中 $U=(u,v,\theta,\eta)^\top$, $\bar U=(\bar u,\bar v,\bar\theta,\bar\eta)^\top\in\mathscr{H}$.

接下来定义问题 (1.6)–(1.11) 的能量 $E(t)$:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L p(x)u_x^2(t)dx+\frac{1}{2}\int_0^L m(x)u_t^2(t)dx+\frac{1}{2}\int_0^L \theta(t)dx$$
$$+\frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2+\int_0^L F(u)dx-\int_0^L hu(t)dx. \tag{2.6}$$

于是有如下引理.

引理 2.1 存在大于零的常数 $\alpha_0>0$, 使得能量 $E(t)$ 满足

$$E(t)\geq \alpha_0(\|u_x\|^2+\|u_t\|^2+\|\theta\|^2+\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2)-C, \tag{2.7}$$

其中 $C=C(\|h\|)>0$.

证明 令 $\tilde{E}(t)=E(t)+C$, $C=C_fL+\frac{1}{\lambda_1\rho}\|h\|^2$, 其中 $\rho>0$ 是一个常数. 于是根据 (2.3) 和 Young 不等式, 得到

$$\int_\Omega F(u)dx\geq -\frac{\alpha}{2\lambda_1}\|u_x\|^2-C_fL \quad 和 \quad -\int_\Omega hudx\geq -\frac{\rho}{4}\|\Delta u\|^2-\frac{1}{\lambda_1\rho}\|h\|^2.$$

注意到 (2.1) 和 (2.6), 于是

$$\tilde{E}(t)\geq \left(\frac{p_1}{2}-\frac{\alpha}{2\lambda_1}-\frac{\rho}{4}\right)\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\theta\|^2+\frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2.$$

由于 $\alpha\in[0,p_1\lambda_1)$, 令 $\rho>0$ 充分小, 于是得到 (2.7). 定理得证.

3 适定性

在这一部分, 讨论问题 (1.6)–(1.11) 的整体适定性.

首先利用文 [18] 中的方法, 定义算子 T,

$$T\eta=-\eta_s,\quad \eta\in D(T),$$

其中

$$D(T)=\{\eta\in\mathscr{M}\mid \eta_s\in\mathscr{M},\eta(0)=0\}$$

是平移半群的无穷小生成元. 于是, 下列方程

$$\eta_t=T\eta+\theta,\quad \eta(0)=0$$

的解 η 满足

$$(T\eta,\eta)_{\mathscr{M}}=\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta_x(s)\|^2ds,\quad \eta\in D(T). \tag{3.1}$$

令 $U(t)=(u,v,\theta,\eta)^\top$, 其中 $v=u_t$. 于是问题 (1.6)–(1.11) 转化为下列 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}U(t)=\mathscr{A}U(t)+\mathscr{F}(U(t)),\quad t>0,\\ U(0)=U_0=(u_0,u_1,\theta_0,\eta_0)^\top,\end{cases} \tag{3.2}$$

其中

$$\mathscr{A}U(t)=\begin{pmatrix} v\\ \dfrac{1}{m(x)}[(p(x)u_x+2\delta(x)u_{xt})_x+\kappa\theta_x]\\ \theta_{xx}+\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\eta_{xx}(s)ds+\kappa u_{xt}\\ \theta+T\eta\end{pmatrix},$$

这里算子 $\mathscr{A}$ 定义域为

$$D(\mathscr{A})=\left\{U(t)\in\mathscr{H}\,\middle|\,u\in(H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)),\ u_t\in H_0^1(0,L),\right.$$
$$\left.\theta\in H_0^1(0,L),\ \eta\in D(T),\ \theta_{xx}+\int_0^\infty\mu(s)\eta_{xx}(s)ds\in L^2(0,L)\right\},$$

定义非线性算子 $\mathscr{F}:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 且 $\mathscr{F}(U(t))=(0,\frac{1}{m(x)}f(u),0,0)^\top$. 于是, 我们得到下列关于整体适定性的结论.

定理 3.1 假设 (2.1)–(2.5) 成立, $h(x)\in L^2(0,L)$, 于是有下列结论成立:

(i) 如果初始条件 $U(0)=U_0$, $U_0\in\mathscr{H}$, 则问题 (3.2) 有唯一的弱解 $U(t)\in C([0,\infty),\mathscr{H})$,

$$U(t)=\mathrm{e}^{\mathscr{A}t}U_0+\int_0^t\mathrm{e}^{\mathscr{A}(t-\tau)}\mathscr{F}(U(\tau))d\tau.$$

(ii) 如果 $U^1(t)$ 和 $U^2(t)$ 是问题 (3.2) 的两个弱解, 则存在常数 $C_T>0$, 使得

$$\|U^1(t)-U^2(t)\|_{\mathscr{H}}\le C_T\|U^1(0)-U^2(0)\|_{\mathscr{H}},\quad\forall\,0\le t\le T.$$

(iii) 如果 $U_0\in D(\mathscr{A})$, 则 (ii) 中的弱解是一个强解.

证明 容易看到, 对于任意的 $U=(u,u_t,\theta,\eta)\in\mathscr{H}$,

$$\langle\mathscr{A}U,U\rangle_{\mathscr{H}}=-2\int_0^L\delta(x)u_{xt}^2dx-\int_0^L\theta_x^2dx+\int_0^\infty\mu'(s)\|\eta_x(s)\|^2ds\le 0,$$

所以, 算子 $\mathscr{A}$ 是耗散的.

接下来证明 $R(I-\mathscr{A})=\mathscr{H}$. 令 $\tilde{U}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\theta},\tilde{\eta})\in\mathscr{H}$, 我们希望找到 $U\in D(\mathscr{A})$ 满足 $U-\mathscr{A}U=\tilde{U}$. 重新将问题改写为

$$u-v=\tilde{u},\tag{3.3}$$
$$v-\big[(p(x)u_x+2\delta(x)u_{xt})_x+\kappa\theta_x\big]=m(x)\tilde{v},\tag{3.4}$$
$$\theta-\theta_{xx}-\int_0^\infty\mu(s)\eta_{xx}(s)ds-\kappa u_{xt}=\tilde{\theta},\tag{3.5}$$
$$\eta-\theta-T\eta=\tilde{\eta}.\tag{3.6}$$

由 (3.6) 得

$$\eta(s)=(1-\mathrm{e}^{-s})\theta+\int_0^s\mathrm{e}^{\tau-s}\tilde{\eta}(s)d\tau.\tag{3.7}$$

将 (3.7) 代入 (3.3) 和 (3.5), 得

$$u-\big[(p(x)u_x+2\delta(x)u_{xt})_x+\kappa\theta_x\big]=m(x)\tilde{v}+\tilde{u},\tag{3.8}$$
$$\theta-\theta_{xx}-\int_0^\infty\mu(s)(1-\mathrm{e}^{-s})ds\theta_{xx}-\kappa u_x=\vartheta,\tag{3.9}$$

其中

$$\vartheta=f_1+\kappa\tilde{u}_x+\tilde{\theta},\tag{3.10}$$
$$f_1=\int_0^\infty\mu(s)\int_0^s\mathrm{e}^{\tau-s}\tilde{\eta}_{xx}(s)d\tau ds.$$

对于 $\omega\in H_0^1(0,L)$ 且 $\|\omega_x\|\le 1$, 我们知道

$$|\langle f_1,\omega\rangle_{H^{-1},H_0^1}|=\left|\int_0^\infty\mu(s)\int_0^s\mathrm{e}^{\tau-s}\int_0^L\vartheta_x(\tau)\omega_xdxd\tau ds\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_0^\infty \int_0^s \mu(s)\mathrm{e}^{\tau-s}\|\vartheta_x(\tau)\|d\tau ds\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mu(s)\mathrm{e}^{\tau-s}\|\vartheta_x(\tau)\|dsd\tau\\
&\le \mu_0^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \mu(\tau)\|\vartheta_x(\tau)\|^2 d\tau,
\end{aligned}
$$

那么结合 (3.10) 得 $\vartheta \in H^{-1}(0,L)$. 定义双线性泛函 $\mathscr{B}: H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\to\mathbb{R}$,

$$
\mathscr{B}((u,\theta),(\tilde{u},\tilde{\theta})) = \int_0^L p(x)u_x\tilde{u}_x dx + \int_0^L m(x)u\tilde{u}dx + \int_0^L \theta\tilde{\theta}dx.
$$

易证 $\mathscr{B}$ 在空间 $H_0^1(0,L)$ 中是连续的、强制的. 由 Lax–Milgram 定理得, 椭圆问题 (3.8), (3.9) 存在唯一弱解 $(u,\theta)\in H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$.

另一方面, 由 (3.7) 得

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s)\|\eta_x(s)\|^2 ds &\le 2\mu_0\|\theta_x\|^2 + 2\int_0^\infty \mu(s)\left\|\int_0^s \mathrm{e}^{\tau-s}\tilde{\eta}_x(\tau)d\tau\right\|^2 ds\\
&\le 2\mu_0\|\theta_x\|^2 + 2\int_0^\infty \left(\int_0^s \mathrm{e}^{\tau-s}\sqrt{\mu(\tau)}\|\tilde{\eta}_x(\tau)\|^2 d\tau\right)^2 ds\\
&\le 2\mu_0\|\theta_x\|^2 + 2\|\tilde{\eta}\|_{\mathscr{M}}^2,
\end{aligned}
$$

即 $\eta\in\mathscr{M}$. 所以 $T\eta=\eta-\theta-\tilde{\eta}\in\mathscr{M}$. 于是得到 $U(t)\in D(\mathscr{A})$ 是 $U-\mathscr{A}U=\tilde{U}$ 的解.

综上可知, 算子 $\mathscr{A}$ 是空间 $\mathscr{H}$ 中极大单调算子. 利用 Lumer-Phillips 定理 (可参考文献 [27]), 得到算子在空间 $\mathscr{H}$ 中产生一个压缩半群.

令 $U^i=(u^i,u_t^i,\theta^i,\eta^i)$ $(i=1,2)$, $B\subset\mathscr{H}$ 是一个有界集. 由 (2.2) 得, 对于任意的 $U^1,U^2\in B$,

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{F}(U^1)-\mathscr{F}(U^2)\|_{\mathscr{H}} &\le C_1\|f(u^1)-f(u^2)\|\\
&\le C_f(1+\|u^1\|_{2p}^p+\|u^2\|_{2p}^p)\|u^1-u^2\| \le C_{0f}\|u_x^1-u_x^2\|,
\end{aligned}
$$

其中 $0\le\gamma\le1$ 和 $C_{0f}>0$ 是依赖于初值的常数. 因此, 存在一个依赖于 B 的常数 $C_0>0$, 使得 $\|\mathscr{F}(U^1)-\mathscr{F}(U^2)\|_{\mathscr{H}}\le C_0\|U^1-U^2\|_{\mathscr{H}}$, 即 $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{H}$ 中是局部 Lipschitz 的.

由以上讨论可知, 问题 (3.2) 在区间 $[0,t_{\max})$ 内有唯一局部弱解

$$
U(t)=\mathrm{e}^{\mathscr{A}t}U_0+\int_0^t \mathrm{e}^{\mathscr{A}(t-s)}\mathscr{F}(U(s))ds, \tag{3.11}
$$

如果 $t_{\max}<\infty$, 则

$$
\lim_{t\to\infty}\|U(t)\|_{\mathscr{H}}=\infty. \tag{3.12}
$$

令 $U(t)$ 是满足初始条件 $U_0\in D(\mathscr{A})$ 的一个弱解, 可以推出此弱解就是一个强解. 证明过程类似于文 [27]. 此处具体证明过程省略. 对于所有的 $t\ge0$, 由 (2.7) 得

$$
\|U(t)\|_{\mathscr{H}}^2 \le (E(0)+C)\alpha_0^{-1}.
$$

上述不等式对于弱解来说也是成立的. 这与方程 (3.12) 矛盾. 因此 $t_{\max}=\infty$.

对于 $T>0$ 和任意的 $t\in(0,T)$, 假定 U^1 和 U^2 分别是初值 $U^1(0)$ 和 $U^2(0)$ 对应的两个弱解. 由 (3.11) 得

$$
\|U^1(t)-U^2(t)\|_{\mathscr{H}} \le \|U^1(0)-U^2(0)\|_{\mathscr{H}} + \int_0^t \|U^1(s)-U^2(s)\|_{\mathscr{H}}ds.
$$

对于任意的 $t \in [0,T]$, 利用 Gronwall 不等式, 得

$$\|U^1(t)-U^2(t)\|_{\mathscr{H}} \le \mathrm{e}^{C_0 T}\|U^1(0)-U^2(0)\|_{\mathscr{H}},$$

其中 $C_0 = C(U^1(0), U^2(0))$. 利用文 [27, 定理 6.1.5] 可推出初值在 $D(\mathscr{A})$ 中的任意弱解都是强解. 证毕.

4 长时间动力行为

4.1 抽象结果

关于无穷维动力系统的一些重要概念可以参考文献 [6–9, 20, 28, 29] 等. 本文仅列出一些基本概念和关于拟稳定的一些应用, 详细内容可以参考文献 [8, 9].

如果半群 $S(t)$ 的整体吸引子是严格不变的, 即对于所有的 $t \ge 0$, $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, 则整体吸引子 $\mathscr{A} \subset H$ 是一个有界闭集, 且 $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(S(t)B, \mathscr{A}) = 0$, 其中 dist_H 是空间 H 中的 Hausdorff 半距离.

令 X, Y, Z 是三个自反的 Banach 空间, 且空间 X 紧嵌入到 Y. 引入空间 $H = X \times Y \times Z$. 考虑由方程

$$S(t)U_0 = (u, u_t, \eta), \quad U_0 = (u_0, u_1, \eta_0) \in H \tag{4.1}$$

对应的动力系统 $(H, S(t))$, 其中函数 u 和 η 具有如下正则性:

$$u \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y), \quad \eta \in C^1(\mathbb{R}^+, Z). \tag{4.2}$$

如果在空间 X 上定义一个紧的半范数 n_X 和两个非负的标量函数 $a(t)$ 和 $c(t)$, 且在区间 $t \in [0,\infty)$ 上是局部有界的, 函数 $b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ 满足 $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$, 对于任意的 U^1,$U^2 \in B$, 使得下面两个式子

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_H^2 \le a(t)\|U^1 - U^2\|_H^2 \tag{4.3}$$

和

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_H^2 \le b(t)\|U^1 - U^2\|_H^2 + c(t)\sup_{0<s<t}[n_X(u^1(s) - u^2(s))]^2 \tag{4.4}$$

成立. 我们称动力系统 $(H, S(t))$ 是拟稳定的, 不等式 (4.4) 通常被称为稳定性不等式.

令 $\mathscr{N}$ 是半群 $S(t)$ 的稳定点的集合. 于是不稳定流形 $\mathbb{M}_+(\mathscr{N})$ 是 $y \in H$ 的集类, 使得存在一个完整的轨迹 $u(t)$ 满足

$$u(0) = y, \quad \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(u(t), \mathscr{N}) = 0.$$

一个紧集 $\mathscr{A}_{\exp} \subset H$ 被称为分形指数吸引子, 如果它具有有限的分形维数, 且具有正定不变性. 对于任意的有界集 $B \subset H$, 存在常数 $t_B, C_B > 0$ 和 $\gamma_B > 0$, 使得对于任意 $t \ge t_B$,

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{H}}(S(t)B, \mathscr{A}_{\exp}) \le C_B \exp(-\gamma_B(t - t_B)).$$

如果存在指数吸引子在某个扩张空间 $\widetilde{\mathscr{H}} \supseteq \mathscr{H}$ 上是有限维的, 则称指数吸引子为广义分形指数吸引子.

4.2 主要结论

关于系统的长时间动力学行为的主要结论为如下定理.

定理 4.1 假设 (2.1)–(2.7) 成立, $h(x)\in L^2(\Omega)$, 于是有如下结论成立:

(i) 问题 (1.6)–(1.11) 的动力系统 $(\mathscr{H},S(t))$ 有一个紧的整体吸引子 $\mathscr{A}$. 它的特征是问题 (1.6)–(1.11) 的稳态解的集合 $\mathscr{N}$ 的不稳定流形, 且 $\mathscr{A}$ 具有有限分形维数.

(ii) 问题 (1.6)–(1.11) 的动力系统 $(\mathscr{H},S(t))$ 有一个广义指数吸引子 $\mathscr{A}_{\exp}\subset\mathscr{H}$ 且在

$$\tilde{\mathscr{H}}=L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times\mathscr{M}_0$$

中具有有限的分形维数, 其中 $\mathscr{M}_0=L^2_\mu(\mathbb{R}^+,L^2(0,L))$. 并且, 在空间 $\mathscr{H}^\delta$ 中存在广义指数吸引子, 且该吸引子具有有限的分形维数, 其中 $\mathscr{H}\subset\mathscr{H}^\delta\subset\tilde{\mathscr{H}}$, $\delta\in(0,1]$.

4.3 主要结论的证明

这一部分将证明定理 4.1. 证明过程可以分为以下三个引理.

首先如果函数 $\Phi:H\to\mathbb{R}$ 满足:

(i) 对于任意的 $z\in H$, 映射 $t\to\Phi(S(t)z)$ 是非增的;

(ii) 对于某个 $z\in H$ 和所有的 t, 有 $S(t)z=z$,

我们称动力系统 $(H,S(t))$ 是梯度系统.

引理 4.2 动力系统 $(\mathscr{H},S(t))$ 是梯度系统, 且 Lyapunov 泛函 Φ 在 $\mathscr{H}$ 中的任意有界子集上是上有界函数, 对于任意 R, 集合 $\Phi_R=\{U_0\in\mathscr{H}:\Phi(U_0)\le R\}$ 在 $\mathscr{H}$ 中是有界的.

证明 令能量函数 $E(t)$ (详见 (2.6)) 作为泛函 Φ. 首先, 对于每一个 $U_0=(u_0,u_1,\theta_0,\eta_0)\in\mathscr{H}$, 容易得到

$$\frac{d}{dt}\Phi(S(t)U_0)=-2\int_0^L\delta(x)u_{xt}^2dx-\int_0^L\theta_x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu'(s)\|\eta_x(s)\|^2ds\le 0,\tag{4.5}$$

即 $\Phi(S(t)U_0)$ 是非增函数. 现在我们假设 $\Phi(S(t)U_0)=\Phi(U_0)$, 根据 (2.1) 和 (4.5) 得到

$$\int_0^L u_{xt}^2dx=0\quad\text{和}\quad\int_0^L\theta_x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty(-\mu'(s))\|\eta_x(s)\|^2ds=0.\tag{4.6}$$

利用 (4.6) 第一个式子得到在 $(0,L)$ 中几乎处处有 $u_t(t)=0$, 即对于所有的 $t\ge 0$, 有 $u(t)=u_0$. 由方程 (4.6) 第二个式子推出对于任意的 $t\ge0$, $\int_0^\infty(-\mu'(s))\|\eta_x(s)\|^2ds=0$. 注意到 (2.5) 可推出

$$\eta(x,s)=0,\quad\text{a.e. }\ (x,s)\in\mathbb{R}^+\times(0,L),\quad t\ge0.\tag{4.7}$$

于是, 由 (4.7) 和 (1.8) 得 $\theta(t)=0$. 故 $S(t)U_0=U_0=(u_0,0,0,0)$ 是问题 (1.6)–(1.11) 的稳态解.

由公式 (4.5) 知, Φ 是定义在 $\mathscr{H}$ 中任意有界集上的上有界函数. 令 $(u,u_t,\theta,\eta)\in\mathscr{H}$ 是弱解, 使得 $\Phi(U(t))\le R$, 利用 (2.7) 可以推导出

$$\alpha_0(\|u_x\|^2+\|u_t\|^2+\|\theta\|^2+\|\eta\|^2_{\mathscr{M}})-C\le\Phi(U(t))\le R,$$

即 $\|U(t)\|^2_{\mathscr{H}}\le(C+R)\alpha_0^{-1}$. 上式证明 Φ_R 是 $\mathscr{H}$ 中的有界集. 引理得证.

引理 4.3 问题 (1.6)–(1.11) 稳态解的集合在空间 $\mathscr{H}$ 中是有界的.

证明 根据 $\int_0^L p(x)u_x^2dx=-\int_0^L f(u)udx+\int_0^L hudx$. 由公式 (2.3) 得到

$$-\int_0^L f(u)udx\le\frac{\alpha}{\lambda_1}\|u_x\|^2+C_fL.$$

对于任意的 $\rho>0$, 利用 Young 不等式得

$$\int_0^L hudx\le\frac{\rho}{4}\|u_x\|^2+\frac{1}{\lambda_1\rho}\|h\|^2.$$

由上述两个估计, 推出

$$\left(p_1-\frac{\alpha}{\lambda_1}-\frac{\rho}{4}\right)\|u_x\|^2\le C_fL+\frac{1}{\lambda_1\rho}\|h\|^2.$$

令 $\rho>0$ 足够小, 我们得到 $\mathscr{N}$ 在空间 $\mathscr{H}$ 是有界的. 引理得证.

引理 4.4 (稳定性不等式) 在定理 4.1 的假设下, 令 $B\subset\mathscr{H}$ 是一个有界集, 于是存在依赖于 B 的常数 $\gamma,b_0>0$ 和 $C_B>0$, 使得

$$\|S(t)U^1-S(t)U^2\|_{\mathscr{H}}^2\le b_0\mathrm{e}^{-\gamma t}\|U^1-U^2\|_{\mathscr{H}}^2+C_B\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\|u\|_{2p+2}^2ds, \tag{4.8}$$

其中 $S(t)U^i=(u^i,u_t^i,\eta^i)$ 是问题 (1.6)–(1.11) 在空间 B 中满足初值 U^i, $i=1,2$ 的解, $u=u^1-u^2$.

证明 令 $u=u^1-u^2,\ \theta=\theta^1-\theta^2$ 和 $\eta=\eta^1-\eta^2$, 于是 (u,u_t,θ,η) 是下列方程的一个弱解:

$$m(x)u_{tt}-(p(x)u_x+2\delta(x)u_{xt})_x-\kappa\theta_x+f(u^1)-f(u^2)=0, \tag{4.9}$$

$$\theta_t-\theta_{xx}-\int_0^\infty\mu(s)\eta_{xx}(s)ds-\kappa u_{xt}=0, \tag{4.10}$$

$$\eta_t^t+\eta_s^t=\theta, \tag{4.11}$$

且初始条件为 $u(0)=u^1(0)-u^2(0),\ u_t(0)=u_t^1(0)-u_t^2(0),\ \theta_0=\theta_0^1-\theta_0^2,\ \eta_0=\eta_0^1-\eta_0^2$, 边界条件为 $u(0,t)=u(L,t)=0,\ \theta(0,t)=\theta(L,t)=0$. 定义能量泛函

$$\mathscr{E}(t)=\frac12\int_0^Lp(x)u_x^2dx+\frac12\int_0^Lm(x)u_t^2dx+\frac12\int_0^L\theta^2dx+\frac12\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2. \tag{4.12}$$

显然, 由 (2.1) 得, 存在两个大于零的常数 $\beta_1>0$ 和 $\beta_2>0$, 使得下式成立:

$$\beta_1\mathscr{E}(t)\le\|(u,u_t,\theta,\eta)\|_{\mathscr{H}}^2\le\beta_2\mathscr{E}(t). \tag{4.13}$$

证明过程分为以下四个步骤.

第 1 步 存在一个依赖于集合 B 的正常数 C_B, 使得

$$\mathscr{E}'(t)\le-\delta_1\int_0^Lu_{xt}^2dx-\int_0^L\theta_x^2dx+\int_0^\infty\mu'(s)\|\eta_x(s)\|^2ds+C_B\|u\|_{2p+2}^2. \tag{4.14}$$

事实上, 方程 (4.9) 乘以 u_t, (4.10) 乘以 θ, 将结果在区间 $(0,L)$ 上积分, 并利用 (4.11), 得到

$$\begin{aligned}\mathscr{E}'(t)=&-2\int_0^L\delta(x)u_{xt}^2dx-\int_0^L\theta_x^2dx+\frac12\int_0^\infty\mu'(s)\|\eta_x(s)\|^2ds\\&-\int_0^L(f(u^1)-f(u^2))u_tdx.\end{aligned} \tag{4.15}$$

利用 (2.2), 嵌入定理, Poincaré不等式, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}-\int_0^L(f(u^1)-f(u^2))u_tdx&\le C_f\int_0^L(1+|u^1|^p+|u^2|^p)|u||u_t|dx\\&\le C_f(L^{\frac{p}{2p+2}}+\|u^1\|_{2p+2}^p+\|u^2\|_{2p+2}^p)\|u\|_{2p+2}\|u_t\|\\&\le\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|u_{xt}\|^2+C_B\|u\|_{2p+2}^2.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得 $2\delta_1-\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\ge\delta_1$. 利用 (2.1) 和 (4.15), 可以得到本文所需要的估计 (4.14).

第 2 步 定义函数 $\phi(t)$, $\phi(t)=\int_0^L m(x)u(t)u_t(t)dx$. 将 $\phi(t)$ 关于时间变量 t 求导, 利用公式 (4.9), 得到

$$\begin{aligned}\phi'(t)=&\int_0^L m(x)u_t^2dx-\int_0^L p(x)u_x^2dx-2\int_0^L \delta(x)u_{xt}u_xdx-\kappa\int_0^L u_x\theta dx\\&-\int_0^L(f(u^1)-f(u^2))udx.\end{aligned}\tag{4.16}$$

将 $\mathscr{E}(t)$ 代入 (4.16) 且利用 (2.1), 推出

$$\begin{aligned}\phi'(t)\le&-\mathscr{E}(t)+\frac{3m_1}{2}\int_0^L u_t^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L\theta^2dx+\frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2-\frac{p_1}{2}\int_0^L u_x^2dx\\&-2\delta_1\int_0^L u_{xt}u_xdx-\kappa\int_0^L u_x\theta dx-\int_0^L(f(u^1)-f(u^2))udx.\end{aligned}\tag{4.17}$$

根据 Young 不等式和嵌入不等式, 得

$$-2\delta_1\int_0^L u_{xt}u_xdx\le\frac{p_1}{8}\int_0^L u_x^2dx+\frac{8\delta_1^2}{p_1}\int_0^L u_{xt}^2dx,\tag{4.18}$$

$$-\kappa\int_0^L u_x\theta dx\le\frac{p_1}{8}\int_0^L u_x^2dx+\frac{2\kappa^2}{p_1}\int_0^L\theta^2dx\tag{4.19}$$

和

$$\begin{aligned}-\int_0^L(f(u^1)-f(u^2))udx&\le C_f\int_0^L(1+|u^1|^p+|u^2|^p)|u||u|dx\\&\le C_f(L^{\frac{p}{2p+2}}+\|u^1\|_{2p+2}^p+\|u^2\|_{2p+2}^p)\|u\|_{2p+2}\|u\|\\&\le C_B\|u\|_{2p+2}^2.\end{aligned}\tag{4.20}$$

将公式 (4.18)–(4.20) 代入 (4.17), 推出存在两个大于零的常数 c_1,c_2 满足下列不等式

$$\begin{aligned}\phi'(t)\le&-\mathscr{E}(t)-\frac{p_1}{4}\int_0^L u_x^2dx+\frac{3m_1}{2}\int_0^L u_t^2dx+\frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2\\&+c_1\int_0^L u_{xt}^2dx+c_2\int_0^L\theta^2dx+C_B\|u\|_{2p+2}^2.\end{aligned}\tag{4.21}$$

第 3 步 定义函数 $\psi(t)$, $\psi(t)=-\int_0^\infty g(s)\int_0^L\theta(t)\eta(s)dxds$. 于是存在大于零的常数 c_3,c_4,c_5, 使得

$$\psi'(t)\le-\frac{\mu_0}{2}\int_0^L\theta^2dx+c_3\int_0^L\theta_x^2dx+c_4\int_0^L u_{xt}^2dx-c_5\int_0^\infty\mu'(s)\|\eta_x(s)\|^2ds.\tag{4.22}$$

事实上,

$$\psi'(t)=-\int_0^\infty g(s)\int_0^L\theta_t\eta(s)dxds-\int_0^\infty g(s)\int_0^L\theta\eta_t(s)dxds:=\psi_1+\psi_2.\tag{4.23}$$

利用 (4.10) 得到

$$\begin{aligned}\psi_1=&\underbrace{-\int_0^\infty g(s)\int_0^L\theta_{xx}\eta(s)dxds}_{:=\psi_{11}}\underbrace{-\int_0^\infty g(s)\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds\right)\eta(s)dxds}_{:=\psi_{12}}\\&\underbrace{-\kappa\int_0^\infty g(s)\int_0^L u_{xt}\eta(s)dxds}_{:=\psi_{13}}.\end{aligned}$$

利用 Young 不等式, 得到

$$\psi_{11} \le \frac{\mu_0}{2}\int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2,\quad \psi_{12} \le \mu_0\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2 \quad 和 \quad \psi_{13} \le \frac{\kappa\mu_0}{2}\int_0^L u_{xt}^2 dx + \frac{\kappa}{2\lambda_1}\|\eta\|_{\mathscr{M}}^2.$$

由 (4.11) 得

$$\begin{aligned}\psi_2 &= -\mu_0\int_0^L \theta^2 dx + \int_0^\infty g(s)\int_0^L \theta(t)\eta_s(s)dxds\\ &= -\mu_0\int_0^L \theta^2 dx + \int_0^\infty (-\mu'(s))\int_0^L \theta\eta(s)dxds\\ &\le -\frac{\mu_0}{2}\int_0^L \theta^2 dx - \frac{l_1}{2\mu_0\lambda_1}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|^2 ds,\end{aligned}$$

其中 $l_1 = -\int_0^\infty g'(s)ds$. 上式结合 (4.23) 得到 (4.22).

第 4 步 定义 Lyapunov 泛函 $\mathscr{L}(t)$, $\mathscr{L}(t) = \mathscr{E}(t) + \varepsilon_1\phi(t) + \varepsilon_2\psi(t)$, 其中 ε_1 和 ε_2 是两个大于零的常数. 首先对于充分小的 ε_1 和 ε_2, 容易得到

$$\frac{1}{2}\mathscr{E}(t) \le \mathscr{L}(t) \le \frac{3}{2}\mathscr{E}(t). \tag{4.24}$$

另一方面, 由 (4.14) 和 (4.21)–(4.22), 得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'(t) \le &-\left[\delta_1 - \left(\frac{3m_1}{2\lambda_1} + c_1\right)\varepsilon_1 - c_4\varepsilon_2\right]\int_0^L u_{xt}^2 dx - (1 - c_3\varepsilon_2)\int_0^L \theta_x^2 dx\\ &-\left(\frac{\mu_0}{2}\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1}{2} - c_2\varepsilon_1\right)\int_0^L \theta^2 dx - \frac{p_1\varepsilon_1}{4}\int_0^L u_x^2 dx\\ &+\left(1 - \frac{k}{2}\varepsilon_1 - c_5\varepsilon_2\right)\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta_x(s)\|^2 ds - \varepsilon_1\mathscr{E}(t) + C_B\|u\|_{2p+2}^2.\end{aligned} \tag{4.25}$$

此时, 选择常数 $\varepsilon_2 > 0$ 充分小, 使得 (4.24) 成立. 更进一步,

$$\varepsilon_2 < \min\left\{\frac{1}{2c_3}, \frac{1}{2c_5}, \frac{\delta_1}{2c_4}\right\}.$$

上式可以推出

$$1 - c_3\varepsilon_2 > \frac{1}{2},\quad 1 - c_5\varepsilon_2 > \frac{1}{2},\quad \delta_1 - c_4\varepsilon_2 > \frac{\delta_1}{2}.$$

对于任意固定的 ε_2, 选择 ε_1 充分小, 使得 (4.24) 成立, 且

$$\varepsilon_1 < \min\left\{\frac{\delta_1\lambda_1}{6m_1 + 4c_1\lambda_1}, \frac{1}{2k}, \frac{\mu_0\varepsilon_2}{2c_2 + 1}\right\}.$$

上式说明

$$\frac{3m_1}{2\lambda_1} + c_1 < \frac{\delta_1}{4},\quad \frac{1}{2} - \frac{k}{2}\varepsilon_1 > \frac{1}{4},\quad \frac{\mu_0}{2}\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1}{2} - c_2\varepsilon_1 > 0.$$

通过以上讨论, 可以推出

$$\mathscr{L}'(t) \le -\varepsilon_1\mathscr{E}(t) + C_B\|u\|_{2p+2}^2 \le -\frac{\varepsilon_1}{2}\mathscr{L}(t) + C_B\|u\|_{2p+2}^2.$$

上式容易推出

$$\mathscr{L}(t) \le \mathscr{L}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_1}{2}t} + C_B\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_1}{2}(t-s)}\|u\|_{2p+2}^2 ds. \tag{4.26}$$

再次利用 (4.24), 可以得到 $\mathscr{E}(t) \le 4\mathscr{E}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_1}{2}t} + C_B\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_1}{2}(t-s)}\|u\|_{2p+2}^2 ds$. 考虑到 (4.13), 我们得到 (4.8). 证明得证.

定理 4.1 的证明 (i) 因为动力系统 $(\mathscr{H}, S(t))$ 是定义在问题 (1.6)–(1.11) 上的解算子, 容易证明当 $X = H_0^1$, $Y = L^2$ 和 $Z = \mathscr{M}$ 时, (4.1) 和 (4.2) 成立. 更重要的是由定理 3.1 中的 (ii) 得不等式 (4.3) 成立. 设 $B \subset \mathscr{H}$ 是半群 $S(t)$ 保持正的不变性的有界集. 对于 $U^1, U^2 \in B$, 定义 $S(t)U^i = (u^i, u_t^i, \theta^i, \eta^i)$, $i = 1, 2$ 和 $u = u^1 - u^2$. 定义半范数

$$n_X(u) = \|u\|_{2p+2}.$$

由于 $H^1 \hookrightarrow L^{2p+2}$ 是紧的, 于是得到 $n_X(\cdot)$ 在空间 X 中是紧的半范数. 另外考虑公式 (4.10) 成立, 得出

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_{\mathscr{H}}^2 \le b(t)\|U^1 - U^2\|_{\mathscr{H}}^2 + c(t)\sup_{0<s<t}[n_X(u^1(s) - u^2(s))]^2, \tag{4.27}$$

其中 $b(t) = b_0\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 和 $c(t) = C_B\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}ds,\ t \ge 0$. 显然

$$b(t) \in L^1(\mathbb{R}) \ \text{ 和 } \ \lim_{t\to\infty} b(t) = 0.$$

因为 $B \subset \mathscr{H}$ 是有界的, 可以推出 $c(t)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上是局部有界的. 于是可以证明 (4.4) 成立, 并且动力系统在任意有界正定不变集上是拟稳定的. 根据文献 [9, 命题 7.9.4], 得到动力系统 $(\mathscr{H}, S(t))$ 是渐近光滑的. 根据引理 4.2 和 4.3 和文 [9, 推论 7.5.9] 得出动力系统 $(\mathscr{H}, S(t))$ 存在整体吸引子 $\mathscr{A} = \mathbb{M}_+(\mathscr{N})$. 因为动力系统是吸引子 $\mathscr{A}$ 上拟稳定的, 故 $\mathscr{A}$ 具有有限的分形维数.

(ii) 记 $\mathscr{B} = \{U : \Phi(U) \le R\}$, 其中 Φ 是引理 4.2 中严格的 Lyapunov 函数. 对于正定不变吸收集, 动力系统 $(\mathscr{H}, S(t))$ 是定义在 $\mathscr{B}$ 上的拟稳定的.

当初值 $y = U(0) \in \mathscr{B}$ 时, 由公式 (3.2) 和 $\mathscr{B}$ 的正定不变性推出, 存在常数 $C_{\mathscr{B}} > 0$, 对于任意的 $0 \le t \le T$, 强解 $U(t)$ 满足

$$\|U_t(t)\|_{\tilde{\mathscr{H}}} \le \|\mathscr{A}U(t)\|_{\mathscr{H}} + \|\mathscr{F}(U(t))\|_{\mathscr{H}} \le C_{\mathscr{B}},$$

即对于任意的 $0 \le t_1 < t_2 \le T$,

$$\|S(t_1)y - S(t_2)y\|_{\tilde{\mathscr{H}}} \le \int_{t_1}^{t_2} \|U_t(s)\|_{\tilde{\mathscr{H}}} ds \le C_{\mathscr{B}}|t_1 - t_2|.$$

上式说明对于任意的 $y \in \mathscr{B}$, 映射 $t \mapsto S(t)y$ 在扩展空间 $\tilde{\mathscr{H}}$ 中是 Hölder 连续的, 其中 $\delta = 1$. 通过利用文 [9, 定理 7.9.9], 可以推出广义的指数吸引子的存在性, 且该吸引子的分形维数在 $\tilde{\mathscr{H}}$ 中是有限的.

当 $\delta \in (0, 1)$ 时, 指数吸引子在空间 $\mathscr{H}^\delta$ 中是存在的, 推导可见文 [3]. 于是定理 4.1 得证.

致谢 对审稿人提出的意见和建议表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Alves M. S., Gamboa P., Gorain G. C., et al., Asymptotic behavior of a flexible structure with Cattaneo type of thermal effect, *Indag. Math.*, 2016, **27**: 821–834.

[2] Araujo R. O., Ma T. F., Long-time behavior of quasilinear viscoelastic equation with past history, *J. Differential Equations*, 2013, **254**: 4066–4087.

[3] Barbosa A. R. A., Ma T. F., long-time dynamics of an extensible plate equation with thermal memory, *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **416**: 143–165.

[4] Carlson D. E., Linear Thermoelasticity, in: Handbook of Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[5] Cavalcanti M. M., Fatori L. H., Ma T. F., Attractors for wave equations with degenerate memory, *J. Differential Equations*, 2016, **260**: 56–83.

[6] Chueshov I. D., Introduction to the Theory of Infinite Dimensional Dissipative Systems, Acta Scientific Publishing House, Kharkiv, Ukraine, 2002.

[7] Chueshov I. D., Dynamics of Quasi-stable Dissipative Systems, Springer, New York, 2015.

[8] Chueshov I. D., Lasiecka I., Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[9] Chueshov I. D., Lasiecka I., Von Karman Evolution Equations, Springer-Verlag, Berlin, 2012.

[10] Chueshov I. D., Lasiecka I., Existence, uniqueness of weak solutions and global attractors for a class of nonlinear 2D Kirchhoff–Boussinesq models, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006, **15**: 777–809.

[11] Chueshov I. D., Lasiecka I., On global attractors for 2D Kirchhoff–Boussinesq model with supercritical nonlinearity, *Comm. Partial Diff. Equa.*, 2011, **36**: 67–99.

[12] Dafermos C. M., Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**: 297–308.

[13] Fatori H., Jorge Silva M. A., Ma T. F., et al., Long-time behavior of a class of thermoelastic plates with nonlinear strain, *J. Differential Equations*, 2015, **259**: 4831–4862.

[14] Feng B., Long-time dynamics of a plate equation with memory and time delay, *Bull. Braz. Math. Soc. New Series*, 2018, **49**: 395–418.

[15] Feng B., Yang X. G., Qin Y., Uniform attractors for a nonautonomous extensible plate equation with a strong damping, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2017, **40**: 3479–3492.

[16] Giorgi C., Grasseli M., Pata V., Well-posedness and longtime behavior of the phase-field model with memory in a history space setting, *Q. Appl. Math.*, 2001, **59**: 701–736.

[17] Giorgi C., Marzocchi A., Pata V., Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory, *NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 1998, **5**: 333–354.

[18] Giorgi C., Naso M. G., Pata V., Exponential stability in linear heat conduction with memory: a semigroup approach, *Commun. Appl. Anal.*, 2001, **5**: 121–133.

[19] Gorain G. C., Exponential stabilization of longitudinal vibrations of an inhomogeneous beam, *J. Math. Sci.*, 2014, **198**: 245–251.

[20] Hale J. K., Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, Math. Surveys Monogr., American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[21] Jorge Silva M. A., Ma T. F., Long-time dynamics for a class of Kirchhoff models with memory, *J. Math. Phys.*, 2013, **54**, 021505.

[22] Liu K., Liu Z., Exponential decay of energy of the Euler–Bernoulli beam with locally distributed Kelvin–Voigt damping, *SIAM J. Control Optim.*, 1998, **36**: 1086–1098.

[23] Ma T. F., Pelicer M. L., Attractors for weakly damped beam equations with p-Laplacian, *Discrete Contin. Dyn. Sys.*, 2013, **Supplement**: 513–522.

[24] Ma T. F., Narciso V., Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms, *Nonlinear Anal.*, 2010, **73**: 3402–3412.

[25] Misra S., Alves M., Gorain G. C., et al., Stability of the vibrations of an inhomogeneous flexible structure with thermal effect, *Int. J. Dynam. Control*, 2015, **3**: 354–362.

[26] Nandi P. K., Gorain G. C., Kar S., A note on stability of longitudinal vibrations of an inhomogeneous beam, *Appl. Math.*, 2012, **3**: 19–23.

[27] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, New York, 1983.

[28] Robinson J. C., Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors, Cambridge University Press, England, 2001.

[29] Temam R., Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York, 1988.

[30] Yang Z., longtime behavior for a nonlinear wave equation arising in elasto-plastic flow, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2009, **32**: 1082–1104.

[31] Yang Z., Finite-dimensional attractors for the Kirchhoff models, *J. Math. Phys.*, 2010, **51**, 092703.

[32] Yang Z., Global attractor and their Hausdorff dimensions for a class of Kirchhoff models, *J. Math. Phys.*, 2010, **51**, 032701.